DOI:10.13574/j.cnki.artsexp.1995.03.013

●罗天全

论管子『三分损益法』

"三分损益法"见载于《管子·地员篇》。它采用数学方法计算五声音阶中各音之弦长比例，是我国乃至世界音乐史上记载最早的一种求律方法。河南舞阳七孔骨笛的出土，说明早在管子时代以前的音乐实践中已开始使用五声乃至七声音阶，也证明管子《三分损益法》有其充分的实践基础。本文拟从以下五个方面进行一些探讨。

一．关于《管子·地员篇》中记载的"三分损益法"

《管子·地员篇》曰："凡将起五音，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄钟小素之首，以成宫；三分而益之以一，为百有八，为徵；不无有三分而去其乘，适足以是生商；有三分而复于其所，以是生羽；有三分而去其乘，以是生角"。

这就是中国古代音乐中非常著名的"三分损益法"。它的大意是说：要想求出五音，首先应求出一个标准音，即"黄钟"。把它作为"宫"音，然后可就宫音的长度增加三分之一（三分而益之以一），算出低四度的"徵"音；再就"徵"音的长度减去三分之一（三分损一），可得徵音的高五度音，即"商"音；把商音的长度增加三分之一，可得商音的低四度音，即"羽"音；把羽音的长度减去三分之一，可得羽音的高五度音，即"角"音。

如果用算式将这段话表达出来，即：

宫　$1\times(3)^4=81$

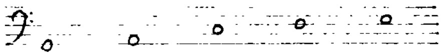
徵　$81\times4/3=108$

商　$108\times2/3=72$

羽　$72\times4/3=96$

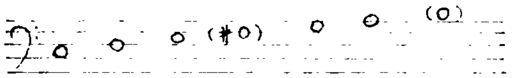
角　$96\times2/3=64$

这是五个振动弦分的相对长度的比数，若按各音的相对高度排列，则可得出一个以徵音为最低音的五声音阶。下面将它们的弦长比数、相对音高及其古代音名对照排列如下：

古代音名	徵	羽	宫	商	角
相对音高					
弦长比数	108	96	81	72	64

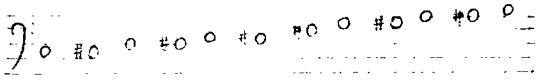
这种五声音阶在中国古代音乐中被称为"正声"，是古今中国民间音乐中最为常见的音阶形式。《左传·昭公二十五年》载子大叔回答赵简询问揖让、周旋之礼时说："九歌、八风、七音、六律，以奉五声"。由此可见管子的计算方法是根据当时音乐实践的实际情况和经验而得出的，它与中华民族的音乐审美观可谓一脉相承。

采用"三分损益法"继续往下推算，便可得出七声音阶的两个变音，即"变徵"、"变宫"：



宫　商　角　变徵　徵　羽　变宫

若据此法再往下推，便可求全十二律。将这十二律用现代音名表示，即：



c　♯c　d　♯d　e　♯e　♯f　g　♯g　a　♯a　b

用"三分损益法"所生的各律，形成一种律制，称为"三分损益律"。

二.《管子·地员篇》与《吕氏春秋·音律篇》求律方法之异同

在《吕氏春秋·季夏纪》的《音律篇》中，也记载着采用"三分损益法"所生的十二律：

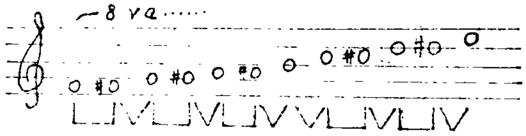
"黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生，三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。"

《吕氏春秋·音律篇》记载的方法，其原理与《管子·地员篇》记载的方法基本相同，它是在"三分损益法"生五律的基础上继续往下推算，进而算全了十二律的弦上音位。下面将它计算的次序和《管子·地员篇》求律的次序对照如下：

求律次序	(1)	(8)	(3)	(10)	(5)	(12)	(7)	(2)	(9)	(4)	(11)	(6)
吕氏春秋·音律篇	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
《管子·地员篇》	宫		商		角			徵		羽		

据史籍记载，当时用作音高标准的黄钟音约相当于现在的 f^2。如以此音作为宫音，即可得出十二律的音高和音程关系。下面将它的音名、唱名及音程距离（音分）列表如下：

律名：黄钟　大吕　太簇　夹钟　姑洗　仲吕　蕤宾　林钟　夷则　南吕　无射　应钟



音分：114　90　114　90　114　90　90　114　90　114　90

音名：f　♯f　g　♯g　a　♯a　b　c　♯c　d　♯d　e

唱名：1　♯1　2　♯2　3　♯3　♯4　5　♯5　6　♯6　7

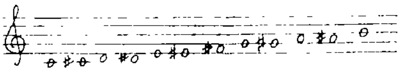
《吕氏春秋·音律篇》与《管子·地员篇》所记载的求律方法的不同之处主要在于：《吕氏春秋·音律篇》用先去其一分的方法求得上方纯五度，继而求得各律；而《管子·地员篇》则用先益之一分的方法求得下方纯四度。就其音律本身来说，两种方法的实质意义基本相同。因为上方纯五度的振动体的长度，刚好是下方纯四度的半数，即宫音的上方纯五度是其下方纯四度的高八度音。但是两者在音阶的排列及调式色彩上则显示出一定的差异。用《管子·地员篇》中的求律方法最早求出的七音，其最低音是下徵音（5̣），构成5̣ 6̣（7̣）123（♯4）的徵调式音阶。并且若以该音阶中的下徵音为宫，即可构成带"清角"（4）的七声音阶1234567；而采用《吕氏春秋·音律篇》中的求律方法所最早求出的七音，其最低音为宫音，构成带变徵（♯4）的七声宫调式音阶，即 123♯4567。由此可见，这两种求律法的基本方法虽然差异不大，但它们各自所产生的音阶结构，调式色彩却颇为不同，从而极大地丰富了音乐的表现力，这无疑与当时的音乐实践活动有着紧密的联系。

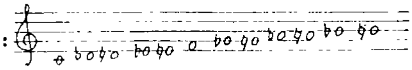
三."三分损益法"与古希腊"五度相生律"之比较

将"三分损益法"所生的十二律按音高顺序依次排列时,它的各律自始发律至所生律,连同首尾律在内共为八律,因此又称"隔八相生法"。隔八相生,实得五度音程,因此又可称"五度相生律"。它和古希腊的五度相生律在其基本原理上相通,但求律的具体方法不尽相同。

古希腊五度相生律由希腊"数论之祖"毕达哥拉斯(Pythangoras)所创,他用五度相生律最早求得欧洲的五声音阶。毕达哥拉斯生卒年约为公元前580年至公元前501年,比起管仲来已经整整晚了140多年。

管仲的"三分损益法"和毕达哥拉斯的"五度相生律"的不同之处在于:三分损益法采用弦长的"三分益一"和"三分损一"之法,往返交替,不断相生,从而求得各律;而五度相生律则以纯五度音连续向上或连续向下生出各律。如以 Do 为起始音,向上可生出 Sol、Re、La、Mi、Si;向下可生出 Fa、♭Si、♭Mi、♭La、♭Re、♭Sol。下面兹将两者所生各律(音)作一对照:

三分损益法:


古希腊五度相生律:


通过比较,我们可看出,"三分损益法"的变化音都带有升号,而古希腊五度相生律的变化音都带有降号。因此,尽管两者都产生十二律(音),但其中只有六个律相同,而其他六个律则不相同;两者虽然都产生七声音阶,但第四度音却又有ˉe与f之差异。

四."三分损益法"产生年代之探正

既然《管子·地员篇》和《吕氏春秋·音律篇》都载有三分损益法的求律方法,而两者成书年代相距四百多年,那么,三分损益法究竟产生于什么时代呢?

音乐学界对这个问题历来颇有争议,下面仅从三个方面谈谈自己的看法。

首先,将《管子·地员篇》和《吕氏春秋·音律篇》中记载的三分损益法作一比较,便可看出,二者虽然都采用同一求律方法,但《管子·地员篇》只求出了十二律的最开始五个音,而《吕氏春秋·音律篇》则在此基础上求全了十二律。我们知道,世界上任何事物的发展都必将经历一个先简后繁、先低级后高级的渐进过程;人对客观事物的认识也有着一个由表及里、由浅入深的深化过程。因此,从逻辑上看,《管子·地员篇》所记载的"三分损益法"应早于《吕氏春秋·音律篇》所记载的"三分损益法",后者不过是仅在前者的基础上有所发展而已。

其次,探讨三分损益法的产生年代必然与探讨《管子》一书的作者这个问题有密切联系。

《管子》一书据传是春秋时期齐桓公的宰相管仲所著。但学术界普遍认为,这时期的著作,一般多是某一学派的集体著述,很少一人为之。此外,还有的学者认为,《管子·地员篇》一章是论土壤和农业生产的章节,所插入的"三分损益法"有可能为注文,应比管子生活年代为晚。那么,管仲到底有无可能发明三分损益法呢?

在《吕氏春秋·慎大览》中,记述了一则故事,说明管仲不但是春秋时期的一位大政治家,而且也是一位造诣非浅的大音乐家。"管子得于鲁,鲁束缚而送之——使役人载而送之齐。皆讴歌而引。管子恐鲁之止而杀己也,欲速至齐,因谓役人曰:'我为汝唱,汝为我和'。其所唱,适宜走。役人不倦而取道甚速。管子可谓能因矣。"这段话生动地说明,管子具有出色的音乐才能,熟悉多种类型的民间歌曲,并深谙音乐的情感作用。因此,他能够在危急时刻机智地运用音乐手段作为达到保护自己的目的。由此也可看出,管子确实具备

发明“三分损益法”所需要的音乐素质，将“三分损益法”归于管子名下并非古人之臆造。

第三，河南舞阳出土的骨笛为我们提供了古人早在春秋时期以前就已在音乐实践活动中使用五声、六声乃至七声音阶的实例，从而证明管仲时代产生“三分损益法”不仅是一种可能，而且是一种历史发展的必然。

1986年、1987年先后两次在河南舞阳贾湖共出土了十八支骨笛。据科学测定，这批骨笛约有近八千年的历史。经有关专家对一只保存完好的七孔骨笛进行考征，确认该笛的音阶结构至少是清商六声音阶，也可能是七声齐备的古代下徵调音阶①。舞阳骨笛的发现使我国古代音阶形成期向前推进了三、四千年的历史，大大早于音乐史学界以前对此所作出的结论。这说明早在管子以前几千年，律学理论就已在我国音乐实践中被实际运用，从而为管子在吸收、整理、归纳前人的经验后提出“三分损益法”这种律学理论提供了科学依据，奠定了实践基础。

从以上几点看来，早在春秋以前，“三分损益法”的原理就已在音乐实践中被长期使用，而“三分损益法”的产生年代最晚不迟于管仲所处的春秋时期。管仲或其门人将这种方法上升到理论、用文字表述将它记载下来，不失为音乐文化史上的一大贡献。

五.“三分损益法”在音乐史上的地位

“三分损益法”无疑是世界上最早、也是当时最先进的律学计算方法，但由于使用“三分损益法”所求出的十二律实际上是一种不平均律，它所形成的半音之间有大半音（114音分）与小半音（90音分）之差异（详见本文第二节）。因此，“三分损益法”上下相生到十二律仲吕时，就出现了“仲吕极不生”、“黄钟不能还原”的现象，暴露出十二律不能回归本律和无法旋宫转调的问题，是故，古代的旋宫转调理论，在采用“三分损益法”的条件下，只能是作为一种美好的理想而存在。

为了实现这种旋宫转调的理想，从那时以来，人们便开始了不知疲倦的探求。继《管子·地员篇》记载“三分损益法”之后，又先后有汉代京房六十律，南北朝时期钱乐之和沈重三百六十律、何承天新律、荀勖笛律、隋唐五代刘焯十二等差律、王朴纯正音阶律、宋代蔡元定三分损益十八律，直到公元1587年明代朱载堉“新法密率”问世，才使得运用十二律进行旋宫转调的理论终于在音乐实践中成为一种现实。

尽管采用“三分损益法”而求得的律制不是一种完备的律制，但它毕竟开了中国律学理论之一代先河，是人类历史上最早将数学、物理学与音乐学有机结合起来的一种可贵的尝试。而运用数理逻辑的精密计算方法来研究乐音之间的音程音高关系，是古代音乐家在其丰富的音乐实践基础上、对乐音间相互关系的更深层次认识和更高层次探求，从而揭开了两千多年律学发展史上的宏伟篇章！

[注]①童忠良《骨笛之谜与古乐探正》（《艺术与时代》1989年第3期）